Environnement Canada Environment Canada

Institut national de recherches en hydrologie

RAPPORT Nº 17 DE L'INRH
ÉTUDE Nº 125, COLLECTION DES RAPPORTS TECHNIQUES DE LA DGEI

Modèle unidimensionnel d'un écoulement souterrain non captif sur une base imperméable en pente

A. Vandenberg

INRH

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHES EN HYDROLOGIE
DIRECTION GÉNÉRALE DES EAUX INTÉRIEURES
OTTAWA, CANADA, 1982

© Ministre des Approvisionnements et Services Canada 1983

N° de cat. Em 36-503/125F

ISBN 0-662-91702-2

Table des matières

	Page
RESUME	v
ABSTRACT	v
INTRODUCTION	1
LE MODELE	1
(a) L'écoulement total à travers la face limite est connu	5
(b) Le potentiel à la limite est toujours connu	5
CODAGE EN FORTRAN	6
Sous-programmes	6
Mémoire centrale	6
DONNEES D'ENTREE	6
EXEMPLES ET COMPARAISON AVEC LES SOLUTIONS ANALYTIQUES	9
(a) Equation différentielle linéarisée de l'écoulement souterrain	9
Exemple 1 : Ecoulement linéaire avec alimentation constante par le compartiment central	9
Exemple 2	11
(b) Equation différentielle pour l'état stable	12
Exemple 3	12
Exemple 4 : Surface de saturation à l'état stable au-dessus d'une base à pente uniforme	12
Exemple 5 : Une solution en fonction du temps	14
REFERENCES	16

Tableaux

1. Codage en FORTRAN	7
2. Comparaison entre la solution analytique et les solutions, calculées à l'aide de la méthode des différences finies, des exemples 1 et 2	11
3. Comparaison entre les résultats, pour l'état stable, de la méthode analytique et ceux obtenus par le modèle des différences finies, exemple 3	13
4. Ecoulement à l'état stable sur une base en pente, solutions analytiques et du modèle	14

Illustrations

Figure 1. Modèle d'un aquifère linéaire non captif	1
Figure 2. Solution en fonction du temps pour une charge en hausse uniforme à x = 0	15

Résumé

Un modèle mathématique unidimensionnel d'un écoulement souterrain non captif sur une base imperméable en pente est décrit. Ce modèle utilise une formule implicite de différences finies de Crank-Nicholson dans laquelle la non-linéarité de l'équation différentielle due à la variation de l'épaisseur saturée est traitée par des ajustements itératifs au cours de chaque étape temporelle. Cinq exemples d'applications possibles sont décrits et les résultats fournis par le modèle sont comparés à certaines solutions analytiques.

Abstract

A mathematical one-dimensional model of unconfined ground water flow over a sloping impermeable base is described. The model employs a Crank-Nicholson implicit finite-difference formulation, in which the non-linearity of the differential equation owing to the varying saturated thickness is handled by iterative adjustment during each time step. Five examples of possible applications are described, and the model results are compared with analytical solutions.

Modèle unidimensionnel d'un écoulement souterrain non captif sur une base imperméable en pente

A. Vandenberg

INTRODUCTION

Une étude du mouvement des eaux d'infiltration d'un site d'enfouissement sanitaire situé près de Gander (Terre-Neuve) a entraîné l'élaboration d'un modèle de l'écoulement souterrain ayant pour but de prévoir les vitesses de l'écoulement en utilisant les données enregistrées des précipitations et les caractéristiques mesurées de l'aquifère. Ce site d'enfouissement est situé à quelques milles de la côte de l'océan Atlantique, dans un terrain où la roche de fond métamorphique très peu perméable est couverte d'une couche de sable et de gravier meubles d'une épaisseur de 10 m environ. La surface de la roche de fond présente une pente douce et uniforme vers la côte. Les courbes de niveau de la surface de saturation non perturbée sont pratiquement parallèles les unes aux autres et avec la côte; par conséquent, le mouvement de l'écoulement souterrain peut être décrit par un modèle unidimensionnel. Ce modèle utilise une formule implicite de différences finies de Crank-Nicholson; l'équation différentielle non linéaire de l'écoulement non captif est d'abord transformée en équation linéaire en utilisant l'hypothèse d'une épaisseur saturée constante, puis cette épaisseur saturée est ajustée itérativement pour chaque étape temporelle.

LE MODELE

La simplification la plus importante utilisée dans l'élaboration du modèle conceptuel (figure 1) est l'hypothèse qu'étant donné que la pente de la base imperméable est très faible, l'écoulement est essentiellement horizontal et s'effectue dans une seule direction.

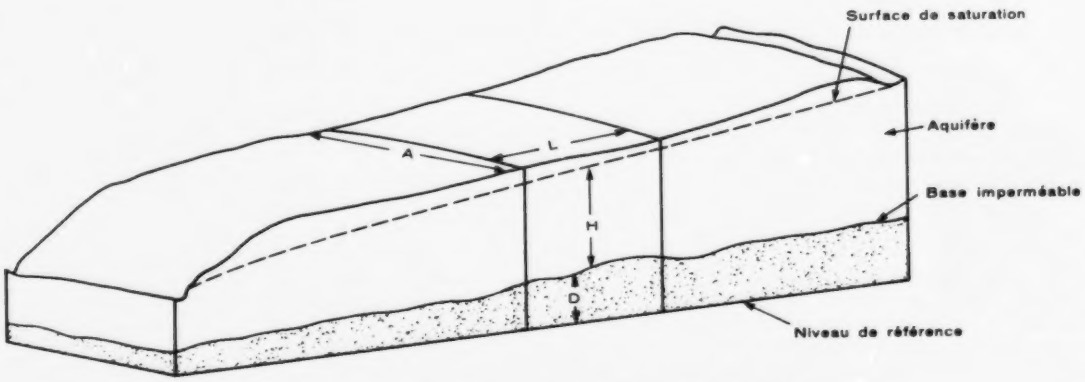

Figure 1. Modèle d'un aquifère linéaire non captif.

La bande d'aquifère entre deux lignes de flux presque parallèles est subdivisée en un certain nombre, n, de petits compartiments auxquels on assigne un noeud, W_i, situé au milieu des limites de chaque compartiment. Les compartiments peuvent être choisis de façon que ces noeuds coïncident autant que possible avec les emplacements des puits d'essai ou d'observation de sorte que les résultats des essais peuvent être considérés comme constituant des valeurs représentatives de l'ensemble du compartiment. Toutefois, pour obtenir un degré raisonnable de précision, on utilisera habituellement un plus grand nombre de compartiments qu'il n'existe de points d'observation.

Les paramètres suivants sont assignés à chacun des compartiments ou noeuds, l'indice indiquant le rang du compartiment (i=1, 2,...n) :

L_i = distance W_i et W_{i+1} (longueur),
A_i = largeur entre les lignes de flux limitatives, mesurée à W_i (longueur),
D_i = hauteur de la base imperméable au-dessus du niveau de référence (longueur),
K_i = perméabilité (longueur/temps),
S_i = emmagasinement spécifique (sans dimensions),
R_i = vitesse d'alimentation par les précipitations (positive) ou évapotranspiration (négative) (longueur/temps), et
h_i = épaisseur saturée (longueur).

La méthode de simulation utilisée dans le modèle constitue fondamentalement une application répétée de la loi de la conservation de la masse exprimée comme étant le bilan hydrologique pour chacun des compartiments. Partant d'un niveau d'eau connu et par conséquent, d'un volume d'eau connu emmagasiné dans chaque compartiment, la variation de l'emmagasinement sur une petite période est calculée pour chaque compartiment à l'aide de l'équation suivante :

augmentation de l'emmagasinement = somme algébrique de tous les apports (1)

Les apports comprennent l'infiltration sur toute la surface du compartiment et l'écoulement souterrain à travers les coupes verticales qui séparent les compartiments. L'infiltration, qui peut être négative, est calculée comme étant le produit d'une vitesse d'infiltration donnée (longueur/temps) et de la surface du compartiment. Pour calculer l'écoulement souterrain entrant ou sortant, on utilise la loi de Darcy :

$$q = -KA'S' \tag{2}$$

où q = débit de l'apport (volume/temps),
A' = surface de la coupe à travers laquelle l'écoulement s'effectue, perpendiculaire à la direction de l'écoulement, et
S' = gradient de la charge piézométrique ou altitude de la nappe aquifère (sans dimensions).

La surface de la coupe, A', est le produit de la largeur, A, du compartiment et de l'épaisseur saturée, h :

$$A' = h\,A \tag{3}$$

L'équation 2 devient par conséquent

$$q = -\,K\,h\,AS' \tag{4}$$

De plus, K, h et A dans l'équation 4 sont les valeurs de ces variables aux limites entre les compartiments alors que dans le modèle, ces valeurs sont définies comme étant les valeurs aux noeuds. Le remplacement de ces variables par leurs valeurs moyennes dans l'équation 4 est par conséquent une approximation logique et l'apport q_1, du $(i-1)^e$ compartiment au i^e compartiment, devient par conséquent

$$q_1 = -(K_{i-1} + K_i)\,(h_{i-1} + h_i)\,(A_{i-1} + A_i)\,S'/8 \tag{5}$$

L'apport q_2, du $(i+1)^e$ compartiment au i^e compartiment, est :

$$q_2 = +(K_{i+1} + K_i)\,(h_{i+1} + h_i)\,(A_{i+1} + A_i)\,S'/8 \tag{6}$$

Le gradient S' pour la limite entre le $(i-1)^e$ compartiment et le i^e compartiment est approximativement représenté par :

$$[h_i + D_i - (h_{i-1} + D_{i-1})]/L_{i-1} \tag{7}$$

et pour la limite entre le i^e compartiment et le $(i+1)^e$ compartiment, par :

$$[h_{i+1} + D_{i+1} - (h_i + D_i)]/L_i \qquad (8)$$

puisque le niveau de l'eau est la somme de l'altitude de la base de l'aquifère, D, et de l'épaisseur saturée.

Dans les termes de l'équation du bilan hydrologique (1) pour l'infiltration et la variation de l'emmagasinement, la surface du i^e compartiment est nécessaire; elle est représentée approximativement par un trapèze dont la hauteur est

$$(L_i + L_{i-1})/2$$

et dont la longueur des côtés parallèles est

$$(A_i + A_{i-1})/2$$

et

$$(A_i + A_{i+1})/2$$

respectivement. Cette surface devient par conséquent :

$$\text{Surface}_i = (A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1})\ (L_i + L_{i-1})/8 \qquad (9)$$

Ainsi, l'alimentation totale jusqu'au i^e compartiment par unité de temps est

$$\text{Alimentation} = R_i\ (A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1})\ (L_i + L_{i-1})/8 \qquad (10)$$

De la même façon, l'augmentation de l'emmagasinement à l'intérieur du compartiment due à l'élévation ou à l'abaissement de la nappe aquifère, par unité de temps, est

$$\Delta\ \text{Emmagasinement} = S_i\ (A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1})(L_i + L_{i-1})(H_i^* - h_i)/(8\Delta t) \qquad (11)$$

où H_i^* = l'épaisseur saturée à la fin de l'intervalle de temps Δt.

Le bilan hydrologique complet du i^e compartiment peut maintenant être exprimé ainsi :

$$q_1 + q_2 + \text{alimentation} = \text{augmentation de l'emmagasinement}$$

ou

$$(h_{i-1} + h_i)(A_{i-1} + A_i)(K_{i-1} + K_i)(h_{i-1} - h_i + D_{i-1} - D_i)/L_{i-1}$$

$$+ (h_i + h_{i+1})(A_i + A_{i+1})(K_i + K_{i+1})(h_{i+1} - h_i + D_{i+1} - D_i)/L_i \qquad (12)$$

$$+ R_i(A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1})(L_i + L_{i-1}) = (S_i/\Delta t)(A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1})(L_i + L_{i-1})(H_i^* - h_i)$$

A l'aide de la formule 12, H_i^* pourrait être calculé explicitement pour chacun des noeuds et pour les incréments temporels successifs. Pour de très petites étapes temporelles, cette méthode pourrait être utilisée mais elle serait nécessairement lente; pour des étapes plus longues, la formule 12 doit être modifiée parce qu'elle implique que pendant l'étape Δt, l'épaisseur saturée, valeur à partir de laquelle la surface de la coupe de l'écoulement et le gradient potentiel sont déterminés, peut être supposée égale à l'épaisseur saturée à t_o, soit au début de l'étape. Cette approximation grossière de la valeur vraie mais inconnue de h(t) est remplacée par l'expression linéaire plus précise suivante :

$$h(t) = h + (H^* - h)(t - t_o)/\Delta t \qquad (13)$$

La valeur moyenne de h(t) pour Δt est par conséquent

$$h(t) = (1/\Delta t) \int_{t_o}^{t_o+\Delta t} [h + (H^* - h)(t - t_o)/\Delta t]dt = (H^* + h)/2 \qquad (14)$$

Si l'on insère (14) dans (12), cette dernière équation devient implicite, c'est-à-dire que les valeurs inconnues H_i^*, H_{i-1}^* et H_{i+1}^* apparaissent dans l'équation pour le i^e compartiment. De plus, du fait que H^* fait partie de la charge hydraulique, $h_i + D_i$, et est également un facteur de la surface de la coupe, l'équation n'est plus linéaire et sa solution directe devient très difficile. Dans le présent modèle, la non-linéarité est résolue de la façon suivante :

(a) Une distinction est faite entre l'épaisseur saturée apparaissant dans l'expression de la surface de la coupe, pour laquelle le symbole h est conservé, et l'épaisseur saturée apparaissant dans l'expression de la charge hydraulique, pour laquelle le symbole H sera utilisé.

(b) Initialement, h sera supposé constant avec une valeur égale à la valeur de h au début de l'étape temporelle, alors que H représentera la valeur moyenne pendant l'étape, soit

$$H_{moy.} = (H + H^*)/2$$

où H représente à présent sa valeur au début de l'étape et est par conséquent connu alors que H^* représente la valeur de H à la fin de l'étape.

(c) L'ensemble d'équations linéaires résultant de l'équation 1 pour tous les noeuds est résolu pour H^*.

(d) La valeur de h est maintenant remplacée par $(H + H^*)/2$ et l'ensemble d'équations linéaires est de nouveau résolu, ce qui donne des valeurs améliorées de H^*.

(e) L'étape (d) est continuée jusqu'à ce que la nouvelle valeur de H^* diffère de la dernière valeur calculée par moins qu'une quantité prédéterminée.

(f) Les nouvelles valeurs de H^* remplacent les anciennes valeurs de H et le processus est répété pour l'étape temporelle suivante.

Le remplacement de h par $(H^* + H)/2$ dans l'expression du gradient hydraulique de l'équation 1 donne :

$$\begin{aligned}
&(h_{i-1}+h_i)(K_{i-1}+K_i)(A_{i-1}+A_i)\ [H_{i-1}^*-H_i^*+H_{i-1}-H_i+2(D_{i-1}-D_i)]\ /(2L_{i-1}) \\
&+ (h_i+h_{i+1})(K_i+K_{i+1})(A_i+A_{i+1})\ [H_{i+1}^*-H_i^*+H_{i+1}-H_i+2(D_{i+1}-D_i)]\ /(2L_i) \qquad (15) \\
&+ R_i(A_{i-1}+2A_i+A_{i+1})(L_i+L_{i-1}) = (S_i/\Delta t)(A_{i-1}+2A_i+A_{i+1})(L_i+L_{i-1})(H_i^*-H_i)
\end{aligned}$$

La réorganisation de l'équation 15 avec H^* dans le premier membre et les termes connus dans le deuxième membre donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&- U_i H_{i-1}^* + H_i^* (U_i + S_i P_i/\Delta t + U_{i+1}) - U_{i+1} H_{i+1}^* \\
&= U_i [H_{i-1} - H_i + 2 (D_{i-1} - D_i)] + U_{i+1} [H_{i+1} - H_i + 2 (D_{i+1} - D_i)] \qquad (16) \\
&+ P_i (R_i + S_i H_i/\Delta t)
\end{aligned}$$

où

$$U_i = (h_{i-1} + h_i)(K_{i-1} + K_i)(A_{i-1} + A_i)/(2L_{i-1}) \qquad (17)$$

et

$$P_i = (A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1})(L_{i-1} + L_i) \qquad (18)$$

L'équation 16 est valide pour tout compartiment intérieur. Pour les compartiments extrêmes, une équation légèrement différente est nécessaire. Elle peut prendre une forme ou l'autre, selon que l'hypothèse utilisée est soit (a) que l'écoulement total à travers la face limite de l'aquifère est toujours connu, soit (b) que le potentiel à la limite de l'aquifère est toujours connu. L'une de ces conditions doit être remplie pour que le problème ait une seule solution.

(a) L'écoulement total à travers la face limite est connu

La notation suivante est utilisée :

Q_o = apport total à travers la limite de l'aquifère adjacente au noeud W_1,
Q_m = apport total à travers la limite de l'aquifère adjacente au noeud W_n,
L_o = distance entre W_1 et la limite adjacente, et
L_m = distance entre W_n et la limite adjacente.

Le terme Q_o remplace le terme q_1 (équation 5) dans le bilan hydrologique pour le premier compartiment, ce qui donne

$$H_1^* [U_2 + 8S_1A_1 (L_o + L_1/2)/\Delta t] - U_2H_2^*$$

$$= 8Q_o + U_2 [H_2 - H_1 + 2(D_2 - D_1)] + 8A_1(R_1 + S_1H_1/\Delta t)(L_o + L_1/2) \qquad (19)$$

Le terme Q_m remplace le terme q_2 (équation 6) dans le bilan hydrologique pour le dernier compartiment, ce qui donne

$$- H_{m-1}^* U_m + H_m^* [U_m + (8S_mA_m/\Delta t)(L_m + L_{m-1}/2)]$$

$$= 8Q_m + U_m [H_{m-1} - H_m + 2 (D_{m-1} - D_m)] + 8A_m(R_m + S_mH_m/\Delta t)(L_m + L_{m-1}/2) \qquad (20)$$

(b) Le potentiel à la limite est toujours connu

Soit H_o l'épaisseur saturée à la limite de l'aquifère adjacente au noeud W_1; l'équation pour le bilan hydrologique du premier compartiment peut s'écrire de la façon suivante :

$$H_1^* [4A_1K_1H_o/L_o + U_2 + 8A_1S_1(L_o + L_1/2)/\Delta t] - U_2H_2^*$$

$$= 4A_1K_1H_o(2H_o - H_1)/L_o + U_2 [H_2 - H_1 + 2(D_2 - D_1)] + 8A_1(L_o + L_1/2)(R_1 + S_1H_1/\Delta t) \qquad (21)$$

et si H_L est l'épaisseur saturée à la limite de l'aquifère adjacente au dernier noeud, l'équation pour le dernier compartiment devient :

$$- U_mH_{m-1}^* + H_m^* [4A_mK_mH_L/L_m + U_m + 8A_mS_m(L_m + L_{m-1}/2)/\Delta t]$$

$$= 4A_mK_mH_L(2H_L - H_m)/L_m + U_m [H_{m-1} - H_m + 2(D_{m-1} - D_m)] \qquad (22)$$

$$+ 8A_m(L_m + L_{m-1}/2)(R_m + S_mH_m/\Delta t)$$

CODAGE EN FORTRAN

Le codage en FORTRAN IV pour un programme informatique passé sur l'ordinateur *Control Data Cyber 74* au Centre d'informatique du ministère de l'Energie, des Mines et des Ressources, à Ottawa, est indiqué au tableau 1.

Sous-programmes

Le programme principal ONED (de l'anglais *one-dimensional*) appelle le sous-programme MAS008 pour résoudre un système d'équations linéaires avec structure de bande; ce sous-programme est identique au sous-programme GELB de l'*IBM Scientific Subroutine Package* (IBM, 1966).

Mémoire centrale

Le programme exige 40 K mots de mémoire centrale.

DONNEES D'ENTREE

Les données d'entrée sont introduites en structure non imposée, dans l'ordre suivant. Quoique les limites de carte ne fassent pas partie d'un programme à structure non imposée, chaque instruction de lecture est représentée ici par une carte pour plus de facilité.

Carte 1

Article 1 : N = le nombre de compartiments (nombre entier)

Article 2 : MAX = nombre maximum d'itérations à chaque étape temporelle (nombre entier)

Article 3 : TEST= critère d'exactitude pour les itérations : si la différence entre les valeurs de H calculées au cours de la dernière et de l'avant-dernière itérations est inférieure à la valeur de TEST pour tous les noeuds, l'itération est terminée, les résultats pour l'étape sont imprimés et les calculs pour l'étape suivante commencent.

Article 4 : ALO = distance entre le premier noeud et la limite de l'aquifère adjacente (longueur)

Article 5 : ALL = distance entre le dernier noeud et la limite de l'aquifère adjacente (longueur)

Article 6 : IS = code indiquant les conditions aux limites :
- IS = 0 : L'écoulement est connu aux deux limites.
- IS = 1 : Ecoulement spécifié à la limite près du noeud 1, la charge est connue à la limite près du noeud N.
- IS = 2 : Charge spécifiée à la limite près du noeud 1, écoulement spécifié à la limite près du noeud N.
- IS = 3 : Charge spécifiée aux deux limites.

Article 7 : ID = facteur de saut pour l'impression de l'élévation de la surface de saturation à certains noeuds sélectionnés. Si ID = 1, les valeurs pour tous les noeuds sont imprimées; si ID > 1, les valeurs ne sont imprimées que pour les noeuds 1, 1+ID, 1+2ID, etc.

Carte 2

A_i, i = 1,N : largeur des compartiments (longueur)

AK_i, i = 1,N : perméabilités (longueur/temps)

H_i, i = 1,N : épaisseur saturée (longueur)

D_i, i = 1,N : élévation de la base imperméable (longueur)

S_i, i = 1,N : coefficient d'emmagasinement (sans dimensions)

AL_i, i = 1,N-1 : distances entre les noeuds, valeurs de N-1 seulement (longueur)

Tableau 1. Codage en FORTRAN

```
PROGRAM ONED       73/74   OPT=1                          FTN 4.8+528        03/11/81  14.37.39

1               PROGRAM ONED(INPUT,OUTPUT)
              C*************************************************************************
              C***
              C***  PROGRAM ONED SIMULATES ONE-DIMENSIONAL UNCONFINED GROUNDWATER FLOW
5             C***  OVER AN IMPERMEABLE,SLOPING BASE.THE SOLUTION TECHNIQUE IS A C-N
              C***  FINITE DIFFERENCE METHOD WITH ITERATIVE ADJUSTMENT OF THE
              C***  SATURATED THICKNESS.CONSTANT HEAD OR CONSTANT FLUX BNDRY-CONDITIONS
              C***  MAY BE SELECTED INDEPENDENTLY AT EACH BNDRY.
              C***
10            C*************************************************************************
              C***
                    DIMENSION AL(50),A(50),AK(50),H(50),HA(50),HD(50),D(50),S(50),
                   1U(50),P(50),R(50),B(200),RHS(50)
              C********         LIST OF INPUT VARIABLES
15            C***  DATA INPUT IS LIST-DIRECTED AND FREE FORMAT,BUT FOR CLARITY WILL
              C***  BE DESCRIBED HERE AS APPEARING ON 3 DISTINCT CARDS   ***************
              C*************************************************************************
              C***                      CARD 1
              C*** N       =NUMBER OF NODES
20            C*** MAX     =MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS IN EACH TIMESTEP
              C*** TEST    =ACCURACY LIMIT OF ITERATIONS
              C*** ALO     =DISTANCE FROM FIRST NODE TO NEAREST BOUNDARY
              C*** ALL     =DISTANCE FROM LAST  NODE TO NEAREST BOUNDARY
              C*** IS      = IS=0,THEN ON BOTH BOUNDARIES FLUX IS GIVEN
25            C***            =1,THEN FLUX GIVEN ON BNDRY NEAR NODE 1,HEAD ON BNDRY NEAR NODE N
              C***            =2,THEN HEAD GIVEN ON BNDRY NEAR NODE 1,FLUX ON BNDRY NEAR NODE N
              C***            =3,THEN ON BOTH BNDRIES HEAD IS PRESCRIBED
              C*** ID      =SKIPFACTOR FOR PRINTOUT OF WATERLEVELS AND SAT.THICKNESS
              C***                      CARD 2
30            C*** A(I),I=1,N  =COMPARTMENT WIDTH
              C*** AK(I),I=U,N =PERMEABILITY
              C*** H(I),I=1,N  =SATURATED THICKNESS AT TIME ZERO
              C*** D(I),I=1,N  =ELEVATION OF IMPERMEABLE BASE
              C*** S(I),I=1,N  =STORATIVITY
35            C*** AL(I),I=1,N-1 =DISTANCE BETWEEN NODES
              C***                      CARD 3
              C*** DT   =INITIAL LENGTH OF TIMESTEP
              C*** TINC =MULTIPLICATION FACTOR APPLIED TO DT AT EACH TIMESTEP
              C*** TMAX =MAXIMUM TIME OF SIMULATION WITH THIS SET  OF DATA
40            C*** Q1   =FLUX OR HEAD AT BNDRY NEAR NODE 1 , DEPENDING ON VALUE OF IS
              C*** Q2   =FLUX OR HEAD AT BNDRY NEAR NODE N , DEPENDING ON VALUE OF IS
              C*** R(I),I=1,N.  INFILTRATION RATE
              C***
              C*** REPEAT CARD 3 AS OFTEN AS YOU WISH,WITH INCREASING TMAX
45            C*** LAST CARD MUST CONTAIN (N+5) VALUES OF WHICH THE FIRST MUST BE ZERO.
              C***
                    READ*,N,MAX,TEST,ALO,ALL,IS,ID
                    PRINT 130
              130   FORMAT(*1SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL GROUNDWATER FLOW*//)
50                  PRINT 131 N,MAX,TEST,ALO,ALL,IS,ID
                131 FORMAT(*  UMBER OF NODES                =*,I3/
                   1       * MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS =*,I3/
                   2       * ACCURACY                     =*,E12.5/
                   3       * DISTANCE TO LHS BOUNDARY     =*,E12.5/
55                 4       * DISTANCE TO RHS BOUNDARY     =*,E12.5/
                   5       * BOUNDARY CONDITIONS,SET      =*,I2 /
                   6       * SKIP FACTOR                  =*,I2//)
                    N1=N-1 $ NN=N1*3 $ TM=0
                    READ*,(A(I),I=1,N),(AK(I),I=1,N),(H(I),I=1,N),(D(I),I=1,N),
60                 1(S(I),I=1,N), (AL(I),I=1,N1) $DO 22 I=2,N1
              22    P(I)=(A(I-1)+2.*A(I)+A(I+1))*(AL(I-1)+AL(I))
                    PRINT 300 $ DO 369 I=1,N
                369 PRINT 400,I,A(I),AK(I),          H(I),D(I),S(I),AL(I)
                400 FORMAT(1X,I5,6E12.4)
65              300 FORMAT(4X,*I*,5X,*A=WIDTH*,5X,*AK=PERM. H=SAT.THICK D=BASE ELEV S=
                   1STOR. COEF AL=LENGTH*)
              3     READ*,DT,TINC,TMAX,Q1,Q2,(R(I),I=1,N)$IF(DT.EQ.0.)STOP
                    PRINT 173,DT,TINC,TMAX          ,Q1,Q2
              173   FORMAT(//* INITIAL T-STEP,TIMESTEP-INCREMENT,MAXIMUM TIME,Q1 AND Q
```

```
     12*//          ,5E15.4/)
      PRINT 174,(R(I),I=1,N)
  174 FORMAT(1X,10E12.4)
C***
C*** CALCULATE COEFFICIENTS OF MATRIX-EQUATION
C***
9     ICNT=0 $ DO 1 I=1,N $ HD(I)=H(I)
1     HA(I)=H(I)
10    DO 2 I=2,N $ U(I)=(HA(I-1)+HA(I))*(AK(I-1)+AK(I))*
     1(A(I-1)+A(I))/(2.*AL(I-1))
2     CONTINUE $ IF(IS.GT.1)GOTO 12
      B(1)=U(2)+8.*S(1)*A(1)*(ALO+AL(1)/2.)/DT $ B(2)=-U(2)
      RHS(1)=8.*Q1+U(2)*(H(2)-H(1)-2.*(D(1)-D(2)))+
     1 8.*(R(1)+S(1)*H(1)/DT)*A(1)*(ALO+AL(1)/2.)
      IF(IS.EQ.1)GOTO 14
  15  B(NN)=-U(N)
      B(NN+1)=U(N)+8.*S(N)/DT*A(N)*(ALL+AL(N1)/2.)
      RHS(N)=8.*Q2+U(N)*(H(N1)-H(N)+2.*(D(N1)-D(N)))
     1 +8.*A(N)*(AL(N1)/2.+ALL)*(R(N)+S(N)*H(N)/DT)
  13  DO 4 I=2,N1 $ II=(I-1)*3 $ B(II)=-U(I) $ B(II+2)=-U(I+1)
      B(II+1)=U(I)+U(I+1)+S(I)*P(I)/DT
4     RHS(I)=U(I)*(H(I-1)-H(I)+2.*(D(I-1)-D(I)))
     1+U(I+1)*(H(I+1)-H(I)+2.*(D(I+1)-D(I)))
     2+P(I)*(S(I)*H(I)/DT+R(I))
C****
C***    SOLVE MATRIX-EQUATION
C***
      CALL MAS008(RHS,B,N,1,1,1,1.E-4,IER)
      IF(ICNT.GT.MAX)GOTO 7 $ DO 6 I=1,N1
      IF(RHS(I).LT.0.)RHS(I)=.0001
      IF(ABS(RHS(I)-HD(I)).GT.TEST)GOTO 11
6     CONTINUE
7     DO 8 I=1,N
      B(I)=RHS(I)+D(I)
8     H(I)=RHS(I) $ TM=TM+DT $DT=DT*TINC
      IF((TM+DT).GT.TMAX)DT=TMAX-TM
      PRINT 100,TM,ICNT,IER
      PRINT 600
      PRINT 200,(H(I),I=1,N,ID)
      PRINT 500
      PRINT 200,(B(I),I=1,N,ID)
  500 FORMAT(/*  WATERLEVELS*/)
  600 FORMAT(/*  SATURATED THICKNESS*/)
      IF(TM.GE.TMAX)GOTO3 $ GOTO 9
  100 FORMAT(/* TIME*          ,E12.4,2I5/)
200   FORMAT(1X,10E11.4)
11    DO5 I=1,N $ HA(I)=(H(I)+RHS(I))/2.
5     HD(I)=RHS(I) $ ICNT=ICNT+1 $ GOTO 10
12    FA=4.*A(1)*AK(1)*Q1/ALO $ FB=8.*A(1)*(ALO+AL(1)/2.)
      B(1)=FA +U(2)+FB*S(1)/DT $B(2)=-U(2)
      RHS(1)=FA*(2.*Q1-H(1))+U(2)*(H(2)-H(1)+2.*(D(2)-D(1)))
     1+FB*(R(1)+S(1)*H(1)/DT)
      IF(IS.EQ.2)GOTO 15
  14  B(NN)=-U(N) $ FA=4.*A(N)*AK(N)*Q2/ALL
      FB=8.*A(N)*(ALL+AL(N-1)/2.) $ B(NN+1)=FA+U(N)+FB*S(N)/DT
      RHS(N)=FA*(2.*Q2-H(N))+U(N)*(H(N-1)-H(N)+2.*(D(N-1)-D(N)))
     1+FB*(R(N)+S(N)*H(N)/DT) $ GOTO 13 $ END
```

Carte 3

DT =	longueur initiale de l'étape temporelle (temps)
TINC =	facteur multiplicateur appliqué à DT lors de chaque étape pour augmenter progressivement la longueur de l'étape (sans dimensions)
TMAX =	durée maximum de la simulation avec cet ensemble de données (temps)
Q_1 =	si IS = 0 ou IS = 1, écoulement constant à travers la limite de l'aquifère, vers le premier compartiment (longueur^3/temps) si IS = 2 ou IS = 3, épaisseur saturée constante à la limite de l'aquifère, près du premier compartiment (longueur)
Q_2 =	si IS = 0 ou IS = 2, écoulement constant vers le dernier compartiment (longueur^3/temps) si IS = 1 ou IS = 3, épaisseur saturée constante à la limite près du dernier compartiment (longueur)
R_i, i = 1,N	infiltration dans chaque compartiment à partir de la partie supérieure (longueur/temps)

La carte 3 peut être répétée plusieurs fois, chaque fois avec des valeurs différentes de R_i, Q_1, Q_2, ainsi qu'avec les paramètres relatifs au temps, qui peuvent garder leur valeur ou varier. Remarque : la valeur de chaque TMAX doit être supérieure à celle de la carte précédente.

Dernière carte : Pour arrêter le programme, le paramètre DT doit avoir une valeur de 0 sur la dernière carte. Remarque : même si DT = 0, le programme attend toujours les valeurs des autres variables de cette carte, ce qui est réalisé facilement en utilisant la fonction d'entrée répétée disponible dans un programme à structure non imposée; donc, la dernière carte peut contenir simplement : 100 * 0.

EXEMPLES ET COMPARAISON AVEC LES SOLUTIONS ANALYTIQUES

(a) Equation différentielle linéarisée de l'écoulement souterrain

Si la variation temporelle et spatiale de l'épaisseur saturée est petite par comparaison à l'épaisseur saturée totale, H, cette dernière peut être considérée comme étant une constante. L'équation différentielle de l'écoulement souterrain horizontal non captif devient alors identique à l'équation de l'écoulement captif. Dans le cas unidimensionnel, nous avons :

(1) La formule non linéaire

$$(\partial/\partial x)(Kh\,\partial h/\partial x) = S\,\partial h/\partial t \qquad (23)$$

(2) La formule linéaire

$$HK\partial_2 h/\partial x^2 = S\,\partial h/\partial t \qquad (24)$$

Exemple 1 : Ecoulement linéaire avec alimentation constante par le compartiment central

Le premier exemple est une simulation d'un aquifère horizontal (D = constante) avec perméabilité constante. La charge initiale de l'aquifère est constante et il est supposé que les limites restent à une charge constante égale à la charge initiale dans l'aquifère. L'eau souterraine est par conséquent en équilibre statique au commencement de la simulation, quand une alimentation constante q est appliquée au compartiment central. De plus, les paramètres L, A, K et S sont uniformes dans tout l'aquifère.

Cette simulation est équivalente à l'équation différentielle 24 à condition que la variation de l'épaisseur saturée reste petite par rapport à l'épaisseur saturée totale, avec les conditions suivantes aux limites :

$$h(x, 0) = h(s, t) = h_o \qquad (25)$$

$$AHK\ (\partial h/\partial x) = -qAL/2 \qquad \text{à } x = 0$$

ou

$$\partial h/\partial x = qL/(2HK) \qquad \text{à } x = 0 \qquad (26)$$

et x = s est l'emplacement de l'une ou de l'autre limite de l'aquifère. En raison de la symétrie du problème, l'alimentation, q, est divisée également entre la section droite et la section gauche de l'aquifère. Pour les points situés près du compartiment central, loin des deux limites et pour une courte période après le commencement de l'alimentation, la limite peut de plus être supposée comme étant à l'infini. Etant donné ces hypothèses, la solution suivante a été trouvée pour le problème de la valeur des limites (par exemple, Glover, 1978) :

$$h = h_o + [qLx/(2DK\sqrt{\pi})]\ G(u)$$

où $u = (x^2S/4KHt)^{1/2}$

x = distance jusqu'au point d'alimentation, et

$$G(u) = \int_u^\infty \exp(-y^2)/y^2 dy \qquad (27)$$

Pour la simulation de l'écoulement avec alimentation par le noeud central, les paramètres suivants étaient utilisés :

N	=	nombre de noeuds	= 49
MAX	=	nombre maximum d'itérations	= 100
TEST	=	exactitude de l'ajustement itératif de l'épaisseur saturée	= 0.0001 m
ALO	=	distance jusqu'à la limite gauche	= 10 m
ALL	=	distance jusqu'à la limite droite	= 10 m
IS	=	code pour les conditions aux limites (c'est-à-dire charge spécifiée aux deux limites)	= 3
ID	=	facteur de saut pour l'impression des résultats (les résultats à tous les noeuds doivent être imprimés)	= 1

A_i, i = 1, 49 = 100 m
K_i, i = 1, 49 = 1 m/jour
h_i, i = 1, 49 = 10 m
D_i, i = 1, 49 = 0
S_i, i = 1, 49 = 0.15
L_i, i = 1, 48 = 10 m

DT =	étape temporelle initiale	= 1 jour
TINC =	incrément de l'étape temporelle	= 1.03
TMAX =	période simulée	= 500 jours
Q_1 =	charge constante, limite gauche	= 10 m
Q_2 =	charge constante, limite droite	= 10 m

Alimentation : R_i, i = 1,2...24 = 0
R_{25} = 0.015 m/jour
R_i i = 26,27...49 = 0

Les entrées pour cette simulation sont les suivantes :

carte 1 = 49 100 0.0001 10 10 3 1
carte 2 = 49*100 49*1 49*10 49*0 49*.15 48*10
carte 3 = 1 1.03 500 10 10 24*0 0.015 24*0
carte 4 = 100*0

Dans le tableau 2, les résultats pour le noeud n° 21, situé à 40 m du compartiment alimenté, sont comparés avec la solution analytique :

$$h - h_o = + \frac{(0.015)(10)(40)}{(2)(10)(1)\sqrt{\pi}} G(2.45/t^{1/2})$$

ou

$$n - h_o = 0.1693\ G(2.45/t^{1/2}) \qquad (28)$$

Tableau 2. Comparaison entre la solution analytique et les solutions, calculées à l'aide de la méthode des différences finies, des exemples 1 et 2

t (jours)	u	G(u)*	$h-h_o$ (m) Solution analytique	$h-h_o$ (m) Diff. finies exemple 1	$h-h_o$ (m) Diff. finies exemple 2
1	2.45	7×10^{-5}	0	0	0
2.03	1.72	0.0036	0.0006	0	0
3.09	1.39	0.0165	0.003	0	0
4.18	1.20	0.0388	0.007	0.01	0.01
5.31	1.06	0.0686	0.012	0.01	0.01
6.47	0.963	0.104	0.017	0.02	0.02
8.89	0.822	0.185	0.031	0.03	0.03
11.5	0.724	0.276	0.047	0.05	0.05
15.6	0.620	0.424	0.072	0.07	0.07
20.2	0.546	0.580	0.098	0.10	0.10
28.7	0.458	0.856	0.145	0.14	0.14
34.4	0.418	1.03	0.174	0.17	0.17
50	0.347	1.46	0.247	0.25	0.25
69.2	0.295	1.93	0.327	0.32	0.32
100	0.245	2.56	0.433	0.43	0.43
152	0.199	3.45	0.584	0.58	0.58
201	0.173	4.18	0.708	0.70	0.70
301	0.141	5.46	0.924	0.89	0.91
403	0.122	6.54	1.107	1.04	1.08
500	0.110	7.42	1.256	1.14	1.24

*d'après Glover (1978)

Remarque : vers la fin de la simulation, les résultats par la méthode des différences finies sont inférieurs aux résultats analytiques correspondants à cause de l'effet de la distance finie jusqu'à la limite.

Exemple 2

Pour essayer la solution numérique quand l'écoulement et non la charge constante est spécifié aux limites, l'équation 24 et la condition 25 peuvent être utilisées, mais la condition 26 doit être légèrement modifiée. Puisque Q_1 représente l'écoulement total à travers la face verticale à x = 0, nous avons

$$Q_1 = AHK\ \partial h/\partial x$$

ou

$$\partial h/\partial x = Q_1/AHK$$

La solution analytique devient par conséquent

$$h - h_o = Q_1 x/(AHK\sqrt{\pi})\ G(u)$$

En assignant la valeur de 7.5 m^3/jour à Q_1, les valeurs numériques pour des valeurs identiques de t seront identiques aux valeurs données pour la solution analytique dans l'exemple 1 (équation 28). Les résultats pour le 4^e noeud, situé à 40 m de la limite d'alimentation, sont donnés dans la dernière colonne du tableau 2. Remarquer que la limite à charge constante sur le côté droit étant à présent environ deux fois plus éloignée du point d'alimentation, la déviation, pour t > 200 min, de la solution par la méthode des différences finies par rapport à la solution analytique est beaucoup moins importante que dans le premier exemple.

(b) Equation différentielle pour l'état stable

Dans les systèmes d'eau souterraine dans lesquels l'écoulement est à l'équilibre (aucune variation de la charge en fonction du temps), l'équation 24 est simplifiée et devient

$$(\partial/\partial x)(Kh\ \partial h/\partial x) = 0 \qquad (29)$$

et la non-linéarité ne présente aucun problème. L'équation 29 peut être résolue par :

$$h^2 = ax + B \qquad (30)$$

où a et b sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites; si $h(x = 0) = h_0$ et $h(x = L) = h_L$, l'équation 30 devient

$$h^2 = h_o^{\ 2} + (h_L^{\ 2} - h_o^{\ 2})x/L \qquad (31)$$

Exemple 3

Cet exemple simule comment la charge dans un aquifère horizontal, à l'origine en équilibre statique avec une charge constante de 5 m partout dans l'aquifère, atteindra un nouvel équilibre dynamique quand on augmente soudainement la charge à l'une des extrémités de l'aquifère jusqu'à 10 m et on la garde constante ensuite à 10 m; les cartes de données d'entrée nécessaires sont les suivantes :

```
19  100  0.0001  10  10  3  1
19*100  19*1  19*5  19*0  19*1  18*10
1  1.1  20000  5  10  19*0
100*0
```

L'état stable est atteint après 442 jours; la charge à chacun des noeuds calculée à l'aide de l'équation 31 et les charges calculées par le modèle utilisant la méthode des différences finies sont indiquées au tableau 3.

Exemple 4 : Surface de saturation à l'état stable au-dessus d'une base à pente uniforme

Soit un aquifère reposant sur une base à pente uniforme de sorte que :

$$D = \beta x$$

où $\beta << 1$

l'écoulement quasi-horizontal peut être caractérisé par l'équation différentielle

$$\partial/\partial x\ [h\ \partial(h + \beta x)/\partial x] = (S/K)(\partial h/\partial t)$$

et pour l'état stable par

$$\partial/\partial x\ [h\ (\partial h/\partial x + \beta)] = 0$$

Tableau 3. Comparaison entre les résultats, pour l'état stable, de la méthode analytique et ceux obtenus par le modèle des différences finies, exemple 3

N° du noeud	x (m)	h (état stable) calc. à l'aide de l'équation 31 (m)	h (état stable) calc. par le modèle (m)
1	10	5.362	5.374
2	20	5.701	5.712
3	30	6.021	6.031
4	40	6.325	6.334
5	50	6.614	6.623
6	60	6.892	6.900
7	70	7.159	7.166
8	80	7.416	7.422
9	90	7.665	7.671
10	100	7.906	7.911
11	110	8.139	8.144
12	120	8.367	8.371
13	130	8.588	8.592
14	140	8.803	8.807
15	150	9.014	9.017
16	160	9.220	9.222
17	170	9.421	9.423
18	180	9.618	9.620
19	190	9.811	9.813

Par conséquent

$$h\ (\partial h/\partial x + \beta) = C_1 = -q'/K \qquad (32)$$

où q' = écoulement constant par unité de largeur à toute coupe donnée (longueur^2/temps).

L'équation 32 peut être réécrite de la façon suivante :

$$dx = h/(C_1 - \beta h)\ dh$$

d'où

$$\beta^2 x = \beta h + C_1 \ln (C_1 - \beta h) + C_2$$

Si, par exemple, l'épaisseur saturée à x = L est gardée constante

$$h\ (x=L) = h_L$$

alors

$$C_2 = \beta^2 L - \beta h_L - C_1 \ln (C_1 - \beta h_L)$$

et

$$x = L + (h-h_L)/\beta + (C_1/\beta^2) \ln [(C_1 - \beta h)/(C_1 - \beta h_L)] \qquad (33)$$

Pour L=0, c'est-à-dire l'épaisseur saturée spécifiée à x=0,

$$h(x=0) = h_o$$

$$x = (h-h_o)/\beta + (C_1/\beta^2) \ln [(C_1-\beta h)/(C_1-\beta h_o)] \quad (34)$$

Ainsi, à l'aide soit de l'équation 33 ou de l'équation 34, l'épaisseur saturée à l'état stable en différents points de l'aquifère peut être calculée par inversion, c'est-à-dire que des valeurs arbitraires de h sont supposées et que les valeurs correspondantes de x sont calculées. Les valeurs de h pour des valeurs arbitraires de x peuvent ensuite être calculées par interpolation. Ces calculs ont été faits pour l'aquifère simulé avec les caractéristiques et données d'entrée suivantes :

K = 1 m/jour
S = 0.1
A = 1 m
β = 0.1
L = 100 m
Q_1 = 1 m^3/jour, correspondant à C_1 = -1 m
h_L = 5 m

Le modèle a été passé en machine trois fois avec respectivement 9, 19 et 49 noeuds uniformément espacés. L'épaisseur saturée initiale était de 25 m à tous les noeuds. Le tableau 4 donne les solutions pour l'état stable obtenues à l'aide de l'équation 33 et par les trois passages en machine; il montre que l'exactitude augmente à mesure que le nombre de noeuds est augmenté.

Tableau 4. Ecoulement à l'état stable sur une base en pente, solutions analytique et du modèle

x (m)	Epaisseur saturée, h (m)			
		Solutions du modèle		
	Solution analytique	9 noeuds	19 noeuds	49 noeuds
0	22.834	-	-	-
10	21.37	21.01	21.18	21.29
20	19.88	19.51	19.67	19.80
30	18.36	17.98	18.15	18.28
40	16.78	16.40	16.57	16.70
50	15.15	14.76	14.94	15.07
60	13.47	13.04	13.23	13.37
70	11.66	11.21	11.41	11.57
80	9.74	9.23	9.45	9.62
90	7.60	7.00	7.26	7.45
100	5.00	-	-	-

Exemple 5 : Une solution en fonction du temps

Bien qu'en général l'équation 23 ne puisse être résolue analytiquement, un examen détaillé peut déceler une solution particulière; si l'on suppose que h(x,t) soit de la forme

$$h = ax + bt \quad (35)$$

la substitution de cette expression dans l'équation 23 donne

$$a = \pm (Sb/K)^{1/2}$$

La constante b est déterminée par la condition à la limite x = 0 :

$$h(x = 0, t) = bt$$

c'est-à-dire que la charge à x = 0 augmente linéairement en fonction du temps de h = 0 à t = 0. En supposant une solution avec un a négatif, nous remarquons de plus que les valeurs positives de la charge ne sont possibles que pour

$$x < t(Kb/S)^{1/2}$$

et que pour $x > t(Kb/S)^{1/2}$, la solution 35 doit être remplacée par la solution triviale

$$h = 0 \qquad (36)$$

Par conséquent :

$$\text{Pour } x < t(Kb/S)^{1/2} : h = bt - x(Sb/K)^{1/2}$$

$$\text{Pour } x > t(Kb/S)^{1/2} : h = 0$$

est la solution complète de l'équation différentielle et des conditions initiales et aux limites :

$$h(x = 0, t) = bt$$
$$h(x = \infty, t) = 0$$
$$h(x, t = 0) = 0$$

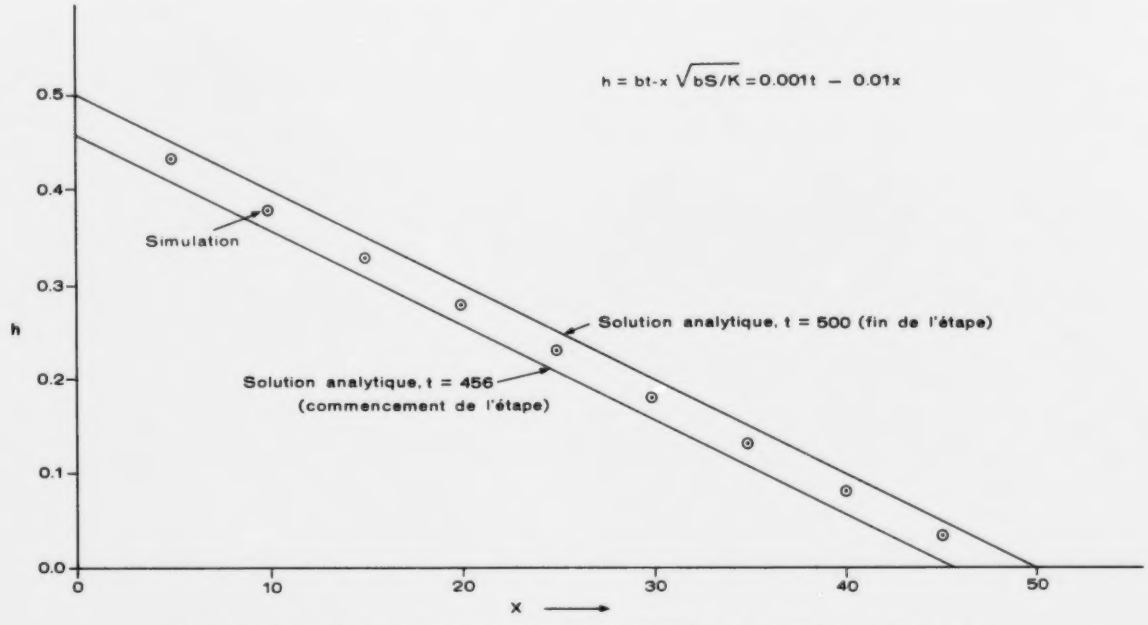

Figure 2. Solution en fonction du temps pour une charge en hausse uniforme à x = 0.

Ce problème était simulé en apportant un léger ajustement au présent programme, ce qui a permis à la valeur de Q_1, représentant la charge à x = 0 sous la condition IS = 3, d'être mise à une valeur égale à celle du temps à la fin de chaque étape temporelle multiplié par un facteur constant, b. La figure 2 montre les charges simulées à t = 500, qui se trouvent à mi-chemin entre les solutions analytiques pour t = 456, commencement de l'étape, et pour t = 500. Par conséquent, la réduction de l'étape aura évidemment pour résultat une convergence vers la solution vraie.

REFERENCES

Glover, R.E. 1978. Transient Ground Water Hydraulics. Water Resources Publications, P.O. Box 303, Fort Collins, Col., 80522, U.S.A.

IBM. 1966. Scientific Subroutine Package; Programmers Manual. IBM Technical Publications Dep., 112 East Post Road, White Plains, N.Y., 10601, U.S.A.